Devoir en classe d'Informatique I,1

50 minutes – 30 points

Exercice 1 [14 p.]

1. Présentez l'algorithme de la *puissance rapide à exposant naturel*. [8 p.]

```
function puissance(base : real; expo : integer) : real;
begin
  if (expo = 0) then
    result := 1
  else
    if ((expo mod 2) = 0) then
      result := puissance(base * base, expo div 2)
    else
      result := base * puissance(base, expo-1);
end;
```

2. Déterminez à l'aide d'un exemple d'exécution le résultat de $(-2)^7$. [4 p.]

```
puissance(-2,7)     = -2 * puissance(-2, 6)
                    = -2 * puissance(-2 * -2, 3) = -2 * puissance(4, 3)
                    = -2 * 4 * puissance(4, 2)
                    = -8 * puissance(4 * 4, 1) = -8 * puissance(16, 1)
                    = -8 * 16 * puissance(16, 0)
                    = -128 * 1 = -128
```

3. Expliquez pourquoi la différence de performance entre l'algorithme de la *puissance rapide à exposant naturel* et l'algorithme de la *puissance à exposant naturel* est la plus grande pour des exposants qui sont des puissances de 2. [2 p.]

Pour les valeurs de l'exposant qui sont des puissances de 2, la valeur de l'exposant est divisée par 2 lors de chaque appel de la fonction jusqu'à ce qu'elle soit égale à 1. La valeur de l'exposant n'est donc jamais décrémentée de 1 et peut se rapprocher le plus rapidement possible du cas dégénéré.

Exercice 2 [16 p.]

On donne la fonction récursive suivante:

```
function F(A, B : integer) : integer;
begin
  if (A = 0) AND (B = 0) then
    F:=1
  else if (A = 0) then
    F:=F(B,0)
  else if (B = 0) then
    F:=1
  else
    F:=(A+B)*F(abs(B-A),2)
end;
```

1. Déterminez à l'aide d'un exemple d'exécution les résultats de :
   a. F(0,0) [1 p.]

   ```
   F(0,0) = 1
   ```

   b. F(-1,1) [3 p.]

   ```
   F(-1,1)     = (-1+1) * F(abs(1-(-1)),2) = 0 * F(2,2) = 0 * (2+2) * F(abs(2-2), 2)
               = 0 * 4 * F(0,2) = 0 * 4 * F(2, 0) = 0 * 4 * 1 = 0
   ```

   c. F(3,7) [4 p.]

   ```
   F(3,7)     = 10 * F(4, 2)
              = 10 * 6 * F(2,2)
              = 60 * 4 * F(0,2)
              = 240 * F(2,0)
              = 240 * 1 = 240
   ```

2. Sheldon prétend que pour certaines valeurs de A et de B, comme par exemple F(3,2), la fonction part dans une « boucle infinie ».
   a. Expliquez pourquoi à l'aide d'un exemple d'exécution de F(3,2) [4 p.]

   ```
   F(3,2)     = 5 * F(abs(2-3),2)
              = 5 * F(1, 2)
              = 5 * 3 * F(abs(2-1), 2)
              = 15 * F(1, 2)
              = 15 * 3 * F(abs(2-1),2) …
   ```

   Comme la valeur absolue de la différence de 2 et de 3 est égale à 1, on arrive à l'appel F(1,2). Or, comme la valeur absolue de la différence de 2 et de 1 est aussi égale à 1, on arrive de nouveau à l'appel F(1,2), ce qui aboutit à des appels permanents de F(1,2).

   b. Déterminez les valeurs de A et de B pour lesquelles la fonction part en « boucle infinie ». [4 p.]

   La fonction va boucler pour toute paire de nombres non nuls (x, y) pour lesquels abs(x-y) = 1.
   D'une manière plus générale, si un argument non nul est pair et si l'autre argument non nul est impair, alors abs(B-A) est impair et par conséquent la fonction va boucler tôt ou tard sur F(1,2) par soustractions consécutives du nombre 2 d'un nombre impair.